1.2 Cực trị của hàm số

1.2.1 Kiến thức

Định nghĩa 1.2. *Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$ và $x_0 \in \mathbb{D}$*

- *Số x_0 được gọi là điểm cực đại của hàm số nếu tồn tại khoảng $(a;b)$ chứa x_0 và $(a;b) \subset \mathbb{D}$ mà*
$$f(x) < f(x_0),\ \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$$
- *Số x_0 được gọi là điểm cực tiểu của hàm số nếu tồn tại khoảng $(a;b)$ chứa x_0 và $(a;b) \subset \mathbb{D}$ mà*
$$f(x) > f(x_0),\ \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$$

Định lí 1.3. ***Điều kiện cần.***[1] *Hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại $x_0 \Longrightarrow f'(x_0) = 0$.*

Định lí 1.4. ***Điều kiện đủ.***

- *$f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua x_0 thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0.*
- *$f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua x_0 thì hàm số đạt cực đại tại x_0.*

Định lí 1.5. *Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp một trên $(a;b)$ chứa x_0 mà $f'(x_0) = 0$ và $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai khác không tại x_0, khi đó:*

- *Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_0.*
- *Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0.*

Chú ý, định lí này chỉ áp dụng khi biết chắc ***đạo hàm cấp hai khác không!*** *Nếu chưa biết chắc thì ta phải xét thêm trường hợp đạo hàm cấp hai bằng không*[2]*!*

1.2.2 Các dạng toán và bài tập mẫu

Dạng 1. Tìm cực trị của hàm số

- Đối với những hàm có thể xét dấu được đạo hàm, ta hay sử dụng cách lập bảng biến thiên.
- Đối với những hàm khó xét dấu đạo hàm, ta hay sử dụng đến đạo hàm cấp hai.

Ví dụ 1.56. Tìm cực trị của hàm số $y = x^3 + 1001$

[1]Xem ví dụ 1.56 ở trang 34

[2]Xem thêm ví dụ 1.57

Hướng dẫn. Tập xác định $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.
Ta có $y' = 3x^2 \geq 0$ nên hàm số đã cho luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó, hàm số đã cho không có cực trị. Mặc dù phương trình $y' = 0$ vẫn có nghiệm $x = 0$ nhưng ta xem bảng biến thiên sau để rõ thêm!

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$y'(x)$		$+$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1001	$\nearrow$	$+\infty$

□

Ví dụ 1.57. Tìm cực trị của hàm số $y = (x-1)^6 + 2016$

Hướng dẫn. Tập xác định $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.
Ta có $y' = 6(x-1)^5$ nên $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Vì $y''(1) = 0$ nên ta không sử dụng được định lí 1.5, bắt buộc phải lập bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$y'(x)$		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2016	$\nearrow$	$+\infty$

Căn cứ vào bảng biến thiên ta có, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$, giá trị cực tiểu là $y_{\text{CT}} = 2016$ □

Chú ý rằng, tùy vào việc xét dấu đạo hàm có đơn giản hay không mà ta sử dụng cách nào. Cụ thể, hãy xem xét ba ví dụ sau:

Ví dụ 1.58. Tìm các điểm cực trị của hàm số sau:

1. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 3$
2. $y = 3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x - 3$
3. $y = x - 3 + \dfrac{9}{x-2}$

Hướng dẫn.

1. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$, đạt cực tiểu tại $x = 2$
2. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$, đạt cực tiểu tại $x = \pm 2$
3. Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$, đạt cực tiểu tại $x = 5$

□

Ví dụ 1.59. Tìm giá trị cực trị của hàm số:

1. $y = \dfrac{x^2 + 8x - 24}{x^2 - 4}$
2. $y = x\sqrt{3 - x}$

Hướng dẫn.

1. Giá trị cực đại là $y_{\text{CĐ}} = f(4) = 2$, giá trị cực tiểu là $y_{\text{CT}} = f(1) = 5$
2. Giá trị cực đại là $y_{\text{CĐ}} = f(2) = 2$, đồ thị hàm số không có cực tiểu.

□

Ví dụ 1.60. Tìm điểm cực đại, cực tiểu của các hàm số sau:

1. $y = x - 2\sin x$
2. $y = x - 2\cos^2 x$.

Hướng dẫn.

1. Hàm số đạt cực đại tại $x = \dfrac{5\pi}{3} + k2\pi$, đạt cực tiểu tại $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$.
2. Hàm số đạt cực đại tại $x = \dfrac{\pi}{12} + k2\pi$, đạt cực tiểu tại $x = \dfrac{5\pi}{3} + k2\pi$.

□

LUYỆN TẬP

Bài 1.52. Tìm cực đại, cực tiểu của các hàm số sau:

1. $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$
2. $y = 2x^5 + 3x - 8$
3. $y = x^4 - 2x^2$
4. $y = \dfrac{x - 3}{2 - 3x}$
5. $y = \dfrac{x^2}{x + 1}$
6. $y = \sqrt{1 - x^2}$
7. $y = \sqrt{x^2 - 1}$
8. $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$
9. $y = |-2x^2 + 3x + 5|$
10. $y = x - 2\sin x$

Đáp số. 1. CĐ $(0; 1)$; CT $(1; 0)$

2. Không có CĐ; CT
3. CĐ $(0; 0)$; $\text{CT}_1\,(-1; -1)$; $\text{CT}_2\,(1; -1)$
4. Không có CĐ; CT
5. CĐ$(-2; -4)$; CT$(0; 0)$
6. CT$(0; 1)$

7. Không có CĐ; CT

8. CĐ$\left(2-\sqrt{3};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; CT$\left(-2-\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

9. CĐ $\left(\frac{3}{4};\frac{49}{8}\right)$; CT$_1$ $(-1;0)$; CT$_2$ $\left(\frac{5}{2};0\right)$

10. CĐ$\left(-\frac{\pi}{3}+k2\pi;-\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}+k2\pi\right)$;
CT$\left(\frac{\pi}{3}+k2\pi;\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}+k2\pi\right)$

Dạng 2. Tìm điều kiện đạt cực trị tại điểm cho trước

Tìm điều kiện để hàm số $y=f(x,m)$ đạt cực trị tại $x=x_0$ cho trước, thường ta có hai cách:

- **Cách 1.** Sử dụng điều kiện cần và đủ:
  + Điều kiện cần: Giả sử hàm số đạt cực trị tại $x=x_0$ thì suy ra $f'(x_0)=0$ từ đó tìm được m.
  + Điều kiện đủ: Với m vừa tìm được, thử lại để kết luận.
- **Cách 2.** Ta xét hai trường hợp:
  + Khi $f''(x_0)=0$ tìm được m và kiểm tra xem có thỏa mãn không.
  + Khi $f''(x_0)\neq 0$ thì sử dụng định lí 1.5 ở trang 34.

Ví dụ 1.61. Cho hàm số: $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-m+1)x+1$. Xác định m để hàm số đạt cực đại tại điểm $x=1$.

Hướng dẫn. [Chữa cả hai cách] Ta có $y'=x^2-2mx+m^2-m+1, y''=2x-2m$.

- **Cách 1.**
  + Điều kiện cần: Giả sử hàm số đạt cực đại tại $x=1$. Suy ra $f'(1)=0 \Leftrightarrow m=1, m=2$.
  + Điều kiện đủ:
    * Với $m=1$ hàm số đã cho trở thành $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+1$. Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$y'(x)$		$+$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Căn cứ vào bảng biến thiên ta thấy hàm số *không đạt cực đại* tại $x=1$. Do đó, $m=1$ không thỏa mãn yêu cầu.

∗ Với $m = 2$ hàm số đã cho trở thành $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$y'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$\frac{7}{3}$	↘	1	↗	$+\infty$

Ta thấy, khi $m = 2$ thì hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

- **Cách 2.** Ta xét hai trường hợp:

  + TH1. Khi $y''(1) = 0 \Leftrightarrow m = 1$ thì hàm số trở thành $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1$. Lập bảng biến thiên như cách 1 và khẳng định $m = 1$ không thỏa mãn yêu cầu.

  + TH2. Khi $y''(1) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ thì hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$$

  Kết hợp hai trường hợp được đáp số $m = 2$.

Vậy với $m = 2$ thì hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 1$. □

Ví dụ 1.62. Tìm m để hàm số $y = \frac{mx^2+x+m}{x-1}$ đạt cực đại tại $x = 2$.

Hướng dẫn. Ta có $y' = \frac{mx^2-2mx-1-m}{(x-1)^2}$

- Điều kiện cần: Giả sử hàm số đạt cực đại tại $x = 2$. Suy ra $y'(2) = 0 \Leftrightarrow m = -1$.
- Điều kiện đủ: Khi $m = -1$ hàm số đã cho trở thành $y = \frac{-x^2+x-1}{x-1}$. Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$y'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$

Vậy với $m = -1$ thì hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 2$. □

Ví dụ 1.63. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$

1. Đạt cực trị tại $x = 1$.
2. Đạt cực tiểu tại $x = 0$

Hướng dẫn. 1. $m = 0$

2. Sử dụng cách 2. Đáp số $m \leq -1$.

□

LUYỆN TẬP

Bài 1.53. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m^2 - 1)x + 2$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Đáp số. $m = 1$

Bài 1.54. Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m^2 - m + 2)x^2 + (3m^2 + 1)x + m - 5$ đạt cực tiểu tại $x = -2$.

Đáp số. $m = 3$

Bài 1.55. Tìm a và b để hàm số $f(x) = \dfrac{2x^2 - ax + 5}{x^2 + b}$ đạt cực đại bằng 6 khi $x = \frac{1}{2}$

Đáp số. $a = -4; b = 1$

Dạng 3. Tìm điều kiện để hàm số có cực trị

- Sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai.
- Hàm số bậc ba có đạo hàm là một tam thức bậc hai nên:
  + có cực trị ⇔ có cực đại ⇔ có cực tiểu ⇔ có cả cực đại và cực tiểu ⇔ có hai cực trị ⇔ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt ⇔ $\Delta > 0$.
  + không có cực trị ⇔ phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép ⇔ $\Delta \leq 0$.
- Hàm số bậc bốn luôn luôn có cực trị:
  + có ba cực trị ⇔ có cả cực đại và cực tiểu ⇔ phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt.
  + có một cực trị ⇔ phương trình $y' = 0$ có đúng một nghiệm.

Ví dụ 1.64. Tìm điều kiện để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + m - 1$ có cực trị?

Hướng dẫn. Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m$ nên

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m = 0 \tag{1.22}$$

Hàm số có cực trị khi và chỉ khi phương trình (1.22) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$$

Vậy với $m < 3$ thì hàm số luôn có cực đại và cực tiểu. □

Ví dụ 1.65. Tìm điều kiện để hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2mx + 1}{x - 1}$ có cực trị?

Hướng dẫn. Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2x - 2m - 1}{(x-1)^2}$ nên

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 2m - 1}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - 2x - 2m - 1 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Đặt $g(x) = x^2 - 2x - 2m - 1$. Hàm số đã cho có cực trị khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 2 > 0 \\ -2m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1$$

Vậy với $m > -1$ thì hàm số có cực đại và cực tiểu. □

Ví dụ 1.66. Tìm m để hàm số $y = \dfrac{mx^2 + (2 - m^2)x - 2m - 1}{x - m}$ có cực đại, cực tiểu

Hướng dẫn. Đáp số: $m < 0$ □

Ví dụ 1.67. Tìm điều kiện để hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 - m$ có cực đại, cực tiểu?

Hướng dẫn. Ta có $y' = 4x^3 - 4(m+1)x = 4x(x^2 - m - 1)$ nên

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m + 1 \quad (*) \end{array}\right.$$

Do đó, hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$$

Vậy với $m < -1$ thì hàm số luôn có cực đại và cực tiểu. □

Ví dụ 1.68. Tìm m để hàm số $y = x^4 + (3 + m)x^3 + 2(1 + m)x^2$ có cực trị?

Ví dụ 1.69. [B2002] Tìm m để hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$ có ba điểm cực trị?

Hướng dẫn. $m < -3$ hoặc $0 < m < 3$ □

LUYỆN TẬP

Bài 1.56. Tìm m để hàm số sau có cực trị:

1. $y = x^3 - 2x^2 + mx + 1$.
2. $y = \frac{1}{3}(m+3)x^3 - 2x^2 + mx + m$.
3. $y = x^3 - 3(m-1)x^2 + (2m^3 - 3m + 2)x + 1$

Bài 1.57. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 3m + 4$:

1. Không có cực trị.

2. Có cực đại và cực tiểu.

Đáp số. **1.** $m \geq 1$ **2.** $m < 1$.

Bài 1.58. Chứng minh hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - (2m+3)\,x + 9$ luôn có cực trị với mọi giá trị của tham số m.

Bài 1.59. Cho hàm số: $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$

1. Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu.

2. Khi đó, hãy viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số.

Đáp số. $m \neq 3$; $\Delta : y = -(m-3)^2 x - (m^2 - 3m + 3)$

Bài 1.60. Cho hàm số: $y = x^3 + mx^2 + 7x + 3$. Tìm m để đường thẳng đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số vuông góc với đường thẳng $d : y = 3x - 7$

Đáp số. $m = \pm\frac{3\sqrt{10}}{2}$

Bài 1.61. [A2002] Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số

$$y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1-m^2)x + m^3 - m$$

Đáp số. $y = 2x - m^2 + m$

Bài 1.62. Tìm m để hàm số $y = x^4 + (m+1)x^2 + 1$ có cực đại và cực tiểu?

Đáp số. $m < -1$

Bài 1.63. Chứng minh rằng hàm số $y = x^4 + mx^3 + mx^2 + mx + 1$ không thể đồng thời có cả cực đại và cực tiểu.

Hướng dẫn. Chỉ ra hàm số chỉ có đúng một cực trị.

Bài 1.64. Tìm m để hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$ có đúng một cực trị?

Hướng dẫn. Xét hai trường hợp: $m = 0$ và $m \neq 0$.

Đáp số. $m \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

Dạng 4. Cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước

Luôn luôn tìm điều kiện để hàm số có cực trị trước, sau đó đối với:

- Cực trị hàm bậc ba: Gọi nghiệm của phương trình $y' = 0$ là x_1, x_2 và sử dụng Viét.
- Cực trị hàm bậc bốn trùng phương: Tìm nghiệm cụ thể của phương trình $y' = 0$.

Lưu ý, ba điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương luôn tạo thành một tam giác cân.

Ví dụ 1.70. [CĐ2009] Tìm m để hàm số $y = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$ có cực đại, cực tiểu và các điểm cực đại, cực tiểu có hoành độ dương?

Hướng dẫn. Tập xác định $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.
Có $y' = 3x^2 - 2(2m-1)x + (2-m)$ nên phương trình $y' = 0$ tương đương với

$$3x^2 - 2(2m-1)x + (2-m) \tag{1.23}$$

Hàm số đã cho có cực đại, cực tiểu và các điểm cực đại, cực tiểu có hoành độ dương $\Leftrightarrow$ phương trình (1.23) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)^2 - 3(2-m) > 0 \\ 2m - 1 > 0 \\ 2 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < 2$$

Vậy đáp số cần tìm là $\frac{5}{4} < m < 2$. □

Ví dụ 1.71. [D2012] Tìm m để hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2\left(3m^2 - 1\right)x + \frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$

Hướng dẫn. Có $y' = 2x^2 - 2mx - 2(3m^2 - 1)$ nên phương trình $y' = 0$ tương đương với

$$2x^2 - 2mx - 2(3m^2 - 1) \tag{1.24}$$

Hàm số đã cho có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình (1.24) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, -\frac{2}{\sqrt{13}}) \cup (\frac{2}{\sqrt{13}}, +\infty)$$

Khi đó, x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1.24) và theo Viét ta có $x_1 + x_2 = m$ và $x_1x_2 = 1 - 3m^2$ Do đó, yêu cầu của đề bài $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$ tương đương với

$$1 - 3m^2 + 2m = 1 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3} \text{ hoặc } m = 0$$

Kết hợp điều kiện được đáp số $m = \frac{2}{3}$. □

Ví dụ 1.72. Chứng minh rằng với mọi $m \neq 0$ thì đồ thị hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + 3(m-1)$ luôn có hai điểm cực trị. Giả sử hai điểm cực trị này là A, B. Tìm m để $2AB^2 - (OA^2 + OB^2) = 20$ với O là gốc tọa độ.

Hướng dẫn. Chỉ ra $A(0, 3m-3)$ và $B(2, -m-3)$ và tìm được $m = 1, m = -\frac{17}{11}$. □

Ví dụ 1.73. Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$. Xác định m để hàm số có 3 điểm cực trị là 3 đỉnh của tam giác vuông cân.

Hướng dẫn. Ta có $y' = 4x^3 - 4m^2x = 4x(x^2 - m^2)$ nên

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - m^2 = 0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow m \neq 0$
Khi đó, ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$$A(0;1), B(m; -m^4+1), C(-m; -m^4+1)$$

Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} = (m; -m^4) \Rightarrow AB = \sqrt{m^2 + m^8} \\ \overrightarrow{AC} = (-m; -m^4) \Rightarrow AC = \sqrt{m^2 + m^8} \end{aligned}$$

Vì ΔABC cân tại A nên 3 điểm cực trị của đồ thị tạo thành một tam giác vuông cân khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -m^2 + m^8 = 0 \Leftrightarrow m^2(m^6 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \pm 1 \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện, được đáp số $m = \pm 1$. □

Ví dụ 1.74. [A2012] Tìm m để ba điểm cực trị của đồ thị hàm số

$$y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$$

tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông.

Hướng dẫn. Ta có $y' = 4x^3 - 4(m+1)x = 4x(x^2 - m - 1)$. Do đó, đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m > -1$. Khi đó, ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$$A(0, m^2), B(\sqrt{m+1}, -2m-1) \text{ và } C(-\sqrt{m+1}, -2m-1)$$

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (-\sqrt{m+1}, -(m+1)^2), \overrightarrow{AC} = (\sqrt{m+1}, -(m+1)^2)$. Nhận thấy tam giác ABC cân tại A nên tam giác ABC vuông khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow (m+1)^4 - (m+1) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ hoặc } m = -1$$

Kết hợp điều kiện được đáp số $m = 0$. □

Ví dụ 1.75. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m^2 - 4, m$ là tham số thực. Xác định m để hàm số đã cho có 3 cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1

Hướng dẫn. TXĐ: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.
Ta có $y' = 4x^3 - 4mx$, nên $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$
Suy ra hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow m > 0$
Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$$A(0; 2m^2 - 4); B(\sqrt{m}; m^2 - 4); C(-\sqrt{m}; m^2 - 4).$$

Ta thấy B, C đối xứng qua Oy và A thuộc Oy nên ΔABC cân tại A. Do đó, gọi H là trung điểm BC thì $AH \perp BC$ và có

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AH.BC \Leftrightarrow 2 = |y_B - y_A| . |2x_B| \Leftrightarrow 2 = 2m^2\sqrt{m} \Leftrightarrow m = 1$$

Đối chiếu với điều kiện được $m = 1$ là giá trị cần tìm. □

Ví dụ 1.76. Tìm m để ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - m - 1$ tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$

Hướng dẫn. Hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi $m < 0$. Khi đó, ba điểm cực trị là

$$A(0; -m - 1), B(\sqrt{-m}; -m^2 - m - 1), C(-\sqrt{-m}; -m^2 - m - 1)$$

Gọi I là trung điểm BC thì

$$S_{\Delta ABC} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}IA.BC = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow m = -2$$

So sánh điều kiện được đáp số $m = -2$. □

Ví dụ 1.77. Tìm các giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + (m^2 - 3)x$ có cực đại x_1, cực tiểu x_2 và x_1, x_2 là độ dài các cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Hướng dẫn. Tập xác định $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.
Có $y' = x^2 - mx + m^2 - 3$ nên $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - mx + m^2 - 3 = 0$
Vì y' là một tam thức bậc hai nên hàm số có cực đại x_1, cực tiểu x_2 thỏa yêu cầu bài toán khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m^2 > 0 \\ m > 0 \\ m^2 - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m > 0 \\ m < -\sqrt{3} \vee m > \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{3} < m < 2$$

Khi đó áp dụng Viét ta được

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 5 \Leftrightarrow 2m^2 - 4(m^2 - 3) = 5 \Leftrightarrow m = \pm\frac{\sqrt{14}}{2}$$

Đối chiếu điều kiện ở trên ta có giá trị $m = \frac{\sqrt{14}}{2}$ thỏa yêu cầu bài toán □

LUYỆN TẬP

Bài 1.65. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2$ (1), m là tham số thực. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị và đường thẳng đi qua hai điểm cực trị tạo với trục Ox một góc φ mà $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Hướng dẫn. Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow m \neq 0$. Khi đó hai điểm cực trị là $A(0, 2), B(2m, -4m^3 + 2)$. Véctơ chỉ phương của trục Ox là $\vec{i}(1, 0)$, véctơ chỉ phương của AB là $\overrightarrow{AB} = ...$

Đáp số. $m = \pm 1$.

Bài 1.66. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ (1). Tìm m để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu và đường thẳng đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu song song với đường thẳng $d : 2x + y - 6 = 0$.

Hướng dẫn. Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow m < 3$. Chia y cho y' được phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu là $y = (\frac{2m}{3} - 2)x + \frac{m}{3} + 1$. *Chú ý:* $a = a', b \neq b'$.

Đáp số. $m = 0$.

Bài 1.67. Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 - 4m^2$ (1). Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị A và B sao cho đường thẳng đi qua hai điểm cực trị A, B là tiếp tuyến của đường tròn $(C) : (x + 1)^2 + (y + 3)^2 = \frac{5}{13}$.

Hướng dẫn. Đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow m \neq 0$. Khi đó tọa độ hai điểm cực trị là $A(-2m, 4m^3 - 4m^2), B(0, -4m^2)$. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $AB : 2m^2x + y + 4m^2 = 0$. Đường thẳng AB tiếp xúc đường tròn (C) là $d(I, AB) = R$.

Đáp số. $m = \pm 2, m = \pm\frac{\sqrt{14}}{4}$.

Bài 1.68. Tìm m để $(C_m) : y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có các điểm cực đại, cực tiểu nằm về một phía đối với đường thẳng $3x - 2y + 8 = 0$.

Hướng dẫn. Các điểm cực trị $A(0, 4m^3), B(2m, 0)$, $(m \neq 0)$.

Đáp số. $m \in (-\frac{4}{3}, 1)$

Bài 1.69. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ (1), m là tham số thực. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị A, B sao cho $OA + OB = 6$.

Hướng dẫn. Ta có $y' = 3x^2 - 6mx = 3x(x - 2m)$. Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow m \neq 0$. Khi đó hai giả sử hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0, 4m^3), B(2m, 0)$.

Đáp số. $m = \pm 1$.

Bài 1.70. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3m(m+2)x + 1$ (1), với m là tham số thực. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua điểm $I(1, 3)$.

Hướng dẫn. Có $y' = 0 \Leftrightarrow x = -m, x = m+2$. Tọa độ hai điểm cực trị là $A(-m, -2m^3 - 3m^2 + 1), B(m+2, 2m^3 + 9m^2 + 12m + 5)$...

Đáp số. $m = 0, m = -2$.

Bài 1.71. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ có đồ thị (C_m). Tìm số thực m để đồ thị hàm số (C_m) có hai điểm cực trị và đường thẳng đi qua hai điểm cực trị đó tạo với hai trục toạ độ một tam giác cân.

Hướng dẫn. Hàm số có hai cực trị $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Delta = 9 + 3m > 0 \Leftrightarrow m > -3$. Ta có

$$y = \frac{1}{3}(x-1)y' - 2(\frac{m}{3} + 1)x + 2 - \frac{m}{3}.$$

Đường thẳng Δ đi qua hai điểm cực trị của đồ thị có phương trình $y = -2(\frac{m}{3} + 1)x + 2 - \frac{m}{3}$. Tìm được giao điểm của Δ với các trục tọa độ. Tam giác OAB cân $OA = OB \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$.

Đáp số. $m = -\frac{3}{2}$.

Bài 1.72. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$ (1). Tìm m để đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại, điểm cực tiểu và khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đến gốc toạ độ O bằng ba lần khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số đến gốc toạ độ O.

Hướng dẫn. Chỉ ra đồ thị hàm số luôn có điểm cực đại, cực tiểu và $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m-1 \\ x = m+1 \end{array}\right.$
Điểm $A(m-1; 2-2m); B(1+m, -2-2m)$ lần lượt là điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số theo giả thiết ta có $OB = 3OA$. Từ đó tìm được m...

Đáp số. $m = 2, m = -\frac{1}{2}$.

Bài 1.73. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 5$ (1). Gọi A, B là các điểm cực trị của đồ thị hàm số (1). Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng $d : x + 3y + 7 = 0$ sao cho $T = \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MO}$ đạt giá trị nhỏ nhất (O là gốc tọa độ).

Hướng dẫn. Vai trò A, B như nhau nên giả sử $A(0, 5)$ và $B(1, 4)$. Gọi G là điểm thỏa mãn

$$\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0},$$

suy ra $G(\frac{1}{3}, 3)$. Và ta có

$$T = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GO})(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + ... = 3MG^2 + \overrightarrow{GO}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GO}$$

Vì $\overrightarrow{GO}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GO} = const$ nên T nhỏ nhất $\Leftrightarrow MG$ nhỏ nhất hay M là hình chiếu của G lên đường thẳng d.

Đáp số. $M(-\frac{13}{10}, -\frac{19}{10})$.

Bài 1.74. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$. Với những giá trị nào của m thì hàm số có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó lập thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$.

Hướng dẫn. Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.
Ba điểm cực trị là $A(0, 2m + m^4), B(\sqrt{m}, m^4 - m^2 + 2m), C(-\sqrt{m}, m^4 - m^2 + 2m)$...

Đáp số. $m = 2$.

Bài 1.75. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - (m+1)x^2 + 2m + 1\,(C_m)$ và $I(0, -\frac{5}{2})$. Tìm m để (C_m) có điểm cực đại là A, hai điểm cực tiểu là B, C sao cho tứ giác $ABIC$ là hình thoi.

Hướng dẫn. Hàm số có một cực đại và hai cực tiểu $\Leftrightarrow m > -1$.
Khi đó ba điểm cực trị là

$$A(0, 2m+1) \text{ và } B(-\sqrt{2(m+1)}, -m^2), C(\sqrt{2(m+1)}, -m^2)$$

Nhận xét rằng AI vuông góc với BC tại $H(0, -m^2)$ và H là trung điểm của BC. Do đó tứ giác $ABIC$ là hình thoi khi và chỉ khi H là trung điểm của AI.

Đáp số. $m = \frac{1}{2}$.

Bài 1.76. Cho hàm số $y = x^4 - 2(1 - m^2)x^2 + m + 1$ có đồ thị (C_m). Tìm m để đồ thị (Cm) có 3 điểm cực trị, đồng thời 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

Hướng dẫn. Đồ thị (Cm) có 3 cực trị khi và chỉ khi $-1 < m < 1$. Tìm được ba điểm cực trị là...

Đáp số. $m = 0$.

Bài 1.77. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$, với m là tham số thực. Tìm các giá trị của m để hàm số có cực đại, cực tiểu mà các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị tạo thành tam giác có diện tích bằng 1.

Hướng dẫn. $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = m$. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi $m > 0$. Tam giác ABC cân tại điểm A nên gọi H là trung điểm BC...

Đáp số. $m = 1$.

Bài 1.78. Cho hàm số $y = x^4 + (3m+1)x^2 - 3$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác cân sao cho độ dài cạnh đáy bằng $\frac{2}{3}$ lần độ dài cạnh bên.

Hướng dẫn. Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow m < -\frac{1}{3}$. Tìm được tọa độ ba điểm cực trị từ đó tìm được...

Đáp số. $m = -5/3$.

Bài 1.79. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m + 1$ (1). Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác sao cho trục Ox chia tam giác đó thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Hướng dẫn. Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow m > 0$. Khi đó ba điểm cực trị là

$$A(0, m+1), B(-\sqrt{m}, -m^2 + m + 1), C(\sqrt{m}, -m^2 + m + 1)$$

Gọi $H(0; -m^2 + m + 1)$ là trung điểm của BC, trục Ox cắt AB, AC tại M và N. Ta phải có

$$\frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AO}{AH} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow ...$$

Đáp số. $m = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2+4\sqrt{2}}}{2}$.

Bài 1.80. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2(m^2+1)x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị thỏa mãn giá trị cực tiểu đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn. $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m^2+1} \end{array}\right.$ nên hàm số luôn có ba điểm cực trị. Và ta có

$$x_{\text{CT}} = \pm\sqrt{m^2+1} \Rightarrow y_{\text{CT}} = -(m^2+1)^2 + 1 \leq 0\ \forall m$$

Đáp số. $m = 0$.

1.3 Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

1.3.1 Kiến thức

- Để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên tập bất kì ta lập bảng biến thiên và căn cứ vào đó để kết luận.
- Để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên một đoạn $[a; b]$ ta có thêm qui tắc:
  + Chỉ ra $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$
  + Tìm tất cả các điểm $x_1, x_2, ...x_n$ thuộc $[a; b]$ mà tại đó đạo hàm bằng không hoặc không xác định
  + Tính $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), ...f(x_n)$
  + So sánh các số $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), ...f(x_n)$ vừa tìm được để kết luận.